1. Fouriertransformation auf dem $\mathbb{R}^n$

Lit.: • Grafakos: Classical Fourier Analysis

• Muscalu/Schlag: Classical and multilinear harmonic Analysis

• Stein/Weiss: Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces

1.1 Die grundlegende L^1-Theorie

Lit.: • Forster: Analysis 3, § 12

• Meise/Vogt: Einführung in die Funktionalanalysis, § 14 (zugleich: Generalreferenz zur Funktionalanalysis)

Def.: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt

$$\hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\,dx$$

die <u>Fouriertransformierte</u> von f (hierbei $x\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$).

Bem.: (i) Wir haben $|\hat{f}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx = (2\pi)^{-n/2} \|f\|_{L^1}$.
Die Fouriertransformierte einer L^1-Funktion ist also beschränkt.

(ii) Sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\xi_n \to \xi \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\hat{f}(\xi_n) - \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(e^{-ix\xi_n} - e^{-ix\xi}) f(x)}_{=: f_n(x)} dx$$

mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ und $|f_n(x)| \leq 2|f(x)|$.

Der Lebesgue'sche Konvergenzsatz liefert $\lim_{n\to\infty} \hat{f}(\xi_n) = \hat{f}(\xi)$, für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist also $\hat{f}$ eine stetige Funktion.

$\hat{f}$ ist sogar gleichmäßig stetig, wie aus der Vorbem. und dem 1.2 nachstehenden Lemma folgt:

<u>Lemma 1.1 (Riemann-Lebesgue):</u> Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f}$ die Fouriertransformierte von f. Dann gilt

$$\lim_{\xi \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Es gibt eine Vielzahl von Beweisen des Riemann-Lebesgueschen Lemmas, von denen ich zwei präsentieren möchte. Alle benutzen notwendigerweise ein Approximationsargument.

<u>Bsp. 1.1</u> und erster Bew. des R.-L. Lemmas:

Es sei $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a_k \leq x_k \leq b_k, 1 \leq k \leq n\}$ ein achsenparalleler Quader. Wir wollen die Fouriertransformierte der charakteristischen Funktion χ_Q eines solchen Quaders berechnen. Wir beginnen mit dem eindimensionalen Fall:

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(x) e^{-ix\xi} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-i\xi} e^{-ix\xi} \Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{i\xi} \left(e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b} \right) \qquad \left(\begin{array}{l} \text{falls } \xi \neq 0. \text{ Für } \xi = 0 \\ \hat{\chi}_{[a,b]}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(b-a) \end{array} \right)$$

(Speziell: $\hat{\chi}_{[-b,b]}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\xi} \sin(b\xi)$.)

Den allgemeinen Fall erhalten wir hieraus mit Hilfe des Satzes von Fubini:

$$\hat{\chi}_Q(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} e^{-ix_1\xi_1} \cdots e^{-ix_n\xi_n} \, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \hat{\chi}_{[a_k, b_k]}(\xi_k) = (2\pi)^{-n/2}(-i)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi_k}\left(e^{-i\xi_k a_k} - e^{-i\xi_k b_k}\right)$$

$$\Longrightarrow \hat{\chi}_Q(\xi) \leq \frac{C}{|\langle\xi_1\rangle \cdots \langle\xi_n\rangle|} \longrightarrow 0 \quad (\xi \to \infty)$$

$$\langle x \rangle = (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Ist nun $t \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine Treppenfunktion der Art

$$t = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \chi_{Q_k}$$

mit achsenparallelen Quadern Q_k, so gilt ebenfalls $\lim_{\xi \to \infty} \hat{t}(\xi) = 0$. Aus der Analysis III ist bekannt, dass solche Treppenfunktionen dicht in L^1 liegen (jede offene Menge läßt sich mit solchen Quadern ausschöpfen, plus die Konstruktion des Lebesgue-Integrals!). Ist jetzt f eine beliebige L^1-Funktion, wählen wir eine Treppenfunktion t, so dass zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gilt $\|f - t\|_{L^1} \leq \varepsilon$.

$$\Longrightarrow |\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{t}(\xi)| + |\hat{t}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2} \|f - t\|_{L^1} + |\hat{t}(\xi)|$$

$$\leq (2\pi)^{-n/2} \cdot \varepsilon + |\hat{t}(\xi)| \longrightarrow (2\pi)^{-n/2}\varepsilon \quad (\xi \to \infty)$$

$$\Longrightarrow \limsup_{\xi \to \infty} |\hat{f}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2} \cdot \varepsilon.$$

Dies erreicht man für jedes positive ε. Also

$$\lim_{\xi \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Zur Vorbereitung des 2. Beweises des R.L.-Lemmas benötigen wir eine weitere Hilfsaussage. Dazu definieren wir für $y \in \mathbb{R}^n$ die Translationsoperatoren

$$\tau_y f(x) := f(x-y)$$

Bem.: Für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ und jedes $p \in [1,\infty]$ ist $\tau_y : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ eine Isometrie (Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^n$!)

Lemma 1.2: Es sei $1 \le p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\lim\limits_{y \to 0} \| \tau_y f - f \|_p = 0$.

Da eine entsprechende Aussage für $L^p(\mathbb{T})$ bereits im letzten Semester bewiesen wurde, nur eine kurze Skizze.

Mit einem Approximationsargument kann man sich darauf zurückziehen, die Aussage für eine stetige Funktion f mit kompaktem Träger (kurz: $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$) zu zeigen. Hierfür hat man

$$\lim_{y \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \, dx = 0$$

nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz mit Majorante $(2\|f\|_\infty)^p \chi_{B_{R+1}(0)}$, falls $\operatorname{supp}(f) \subset B_R(0)$.

2. Bew. von Riemann-Lebesgue: Wir schreiben

$-1 = e^{i\pi} = e^{i\pi \frac{\xi\cdot\xi}{|\xi|^2}}$ und erhalten damit

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\,dx$$

$$= -(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi(x-\frac{\pi\xi}{|\xi|^2})} f(x)\,dx$$

$$= -(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x+\frac{\pi\xi}{|\xi|^2})\,dx\,,\quad \text{also}$$

$$2|\hat{f}(\xi)| = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\left(f(x) - f(x+\frac{\pi\xi}{|\xi|^2})\right) dx \right|$$

$$\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(x) - f(x+\frac{\pi\xi}{|\xi|^2})\right| dx\,.$$

Lemma 1.2 mit $y = -\frac{\pi\xi}{|\xi|^2}$ ergibt jetzt $\lim_{\xi\to\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$. □

<u>Funktionalanalytische Formulierung:</u>

Def.: $C_0^0(\mathbb{R}^n) := \{ f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n) : \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \}$

Dieser Raum wird mit der Supremumsnorm $\|\ \|_\infty$ zu einem normierten Vektorraum. Er bildet einen abgeschlossenen Teilraum von $C_b^0(\mathbb{R}^n)$ und ist daher selbst ein Banachraum.

Damit lautet das Riemann-Lebesgue-Lemma:

Lemma 1.3: Die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_0^0(\mathbb{R}^n), \quad f \longmapsto \hat{f} =: \mathcal{F}f$$

ist eine stetige lineare Abbildung mit Operatornorm

$$\|\mathcal{F}\|_{L^1 \to C_0^0} = (2\pi)^{-n/2}.$$

Bem.: (i) Die Linearität folgt aus den Eigenschaften des Integrals.
(ii) Es gilt tatsächlich Gleichheit, denn für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f \geq 0$ ist

$$\|\hat{f}\|_\infty \geq \hat{f}(0) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = (2\pi)^{-n/2} \|f\|_{L^1}.$$

(iii) $\mathcal{F}: L^1 \to C_0^0$ ist nicht surjektiv (Übungen!)
Eine exakte Charakterisierung des Bildes der Fouriertransformation ist bis heute ein nicht vollständig gelöstes Problem.

(iv) Die Injektivität von $\mathcal{F}$ werden wir als Folgerung aus einer Umkehrformel, der sog. Fourierinversionsformel erhalten.

Wenden wir uns jetzt den einfachen Eigenschaften der Fouriertransformation zu. Das erste diesbezügl. Lemma ist uns im Prinzip von den Fourierreihen her bereits bekannt:

Lemma 1.4: Es seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\xi, a \in \mathbb{R}^n$. Dann gelten:

(1) $\widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi)$

(2) $\widehat{f*g}(\xi) = (2\pi)^{n/2}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$

(Hierbei: $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$ die Faltung von f und g)

Bew.: (1) $(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x-a)\,dx$ Transf. $y = x-a$

$$= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y+a)\xi} f(y)\,dy = e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi)$$

(2) $(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy\,dx$

$$= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x+y)\xi} f(x)\,dx\,dy$$ Fubini + Transf. wie oben

$$= (2\pi)^{n/2}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-iy\xi}\,dy \cdot (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}\,dx = (2\pi)^{n/2}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi). \square$$

(Ggf. als Übungsaufgabe - ist im Prinzip bekannt aus der Vorlesung „Harmonische Analysis". Das etwas umständlich zu handhabende Faltungsprodukt wird in eine punktweise Multiplikation übergeführt durch die Fouriertransformation. Für das nächste Lemma gibt es im periodischen Fall keine Entsprechung.)

Lemma 1.5.: Es seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $A \in GL(n)$. Dann gelten:

(1) $\widehat{f\circ A}(\xi) = \frac{1}{|\det A|}\hat{f}((A^{-1})^t\xi)$

(2) $\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)g(A\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(A^t x)\hat{g}(x)\,dx.$

Bew.:

(1) $(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(Ax)\,dx$ Transf. $y = Ax$, $dy = |\det(A)|\,dx$

$$= (2\pi)^{-n/2} \frac{1}{|\det(A)|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(A^{-1}y)\cdot\xi} f(y)\,dy$$

Beachten wir $(A^{-1}y)\cdot\xi = y\cdot(A^{-1})^t\xi$, folgt die Beh.

(2) $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(A\xi)\,d\xi = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) g(A\xi)\,dx\,d\xi$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} g(A\xi)\,d\xi\, f(x)\,dx \qquad \text{(Fubini)}$$

$$\overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\det(A)|} \hat{g}((A^{-1})^t x)\, f(x)\,dx \qquad y = (A^{-1})^t x$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{|\det(A)|} = dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y)\, f(A^t y)\,dy. \qquad \square$$

Bem.: Wichtige Spezialfälle:

(i) <u>Dilation:</u> Ist für $\lambda > 0$ $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$, so gilt nach

(1) $\hat{f_\lambda}(\xi) = \lambda^{-n}\cdot\hat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$ und nach (2) haben wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\lambda\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x)\hat{g}(x)\,dx.$$

(ii) <u>Approximative Einheiten:</u> $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} K(x)\,dx = 1$

und $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, wobei $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} K(\frac{x}{\varepsilon})$. Dann

ist $\hat{K_\varepsilon}(\xi) = \hat{K}(\varepsilon\xi) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \hat{K}(0) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} K(x)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$.

$(2\pi)^{-n/2}$.

$\hat{K_\varepsilon}$ konvergiert also mit $\varepsilon \to 0$ punktweise gegen das Eins-element der punktweisen Multiplikation ($\cdot(2\pi)^{-n/2}$))

(iii) <u>Orthogonale Transformationen</u> (Drehspiegelungen)

Ist O eine orthogonale Matrix, so ist $O^T = O^{-1}$ und insbesondere $|\det O| = 1$. Also ergibt (1)

$$\widehat{f \circ O}(\xi) = \hat{f}(O\xi)$$

Die Fouriertransformierte einer rotationssymmetrischen Funktion ($f(x) = f(Ox)$ für alle $O \in O(n)$, in diesem Fall ex. ein $\tilde{f} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, so dass $f(x) = \tilde{f}(|x|)$) ist also ebenfalls eine rotationssymmetrische Fkt..

<u>Bsp. 1.2</u>: Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\varphi(x) = e^{-|x|^2/2}$. Dann ist $\hat{\varphi}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$.

<u>Bem.</u>: Die Gaussfunktion φ ist also ein Eigenvektor der Fouriertransformation zum Eigenwert $\lambda = 1$.

<u>Bew.</u>: (i) Zunächst führen wir mit Hilfe des Satzes von Fubini den mehrdim. Fall auf den eindimensionalen zurück:

$$\hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} e^{-|x|^2/2} \, dx$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^{n} e^{-ix_k \xi_k} e^{-x_k^2/2} \, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi_k} e^{-x^2/2} \, dx = \prod_{k=1}^{n} \hat{\varphi}_1(\xi_k),$$

mit $\varphi_1(t) = e^{-t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$.

$n=1$: Für $\xi\in\mathbb{R}$ haben wir

$$\hat{\varphi}_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+i\xi)^2/2}\, dx$$

und $\frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+i\xi)^2/2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial\xi} e^{-(x+i\xi)^2/2}\, dx$

$$= i \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} e^{-(x+i\xi)^2/2}\, dx = 0.$$

Also $\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+i\xi)^2/2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi} \Rightarrow$ Beh. $\square$

Folgerung: Es sei $\lambda\in\mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda>0$ und $\varphi_\lambda(x)=e^{-\frac{\lambda|x|^2}{2}}$.
Dann ist $\hat{\varphi}_\lambda(\xi) = \sqrt{\lambda}^{-n}\cdot e^{-\frac{|\xi|^2}{2\lambda}}$.

Bem. + Begründung: Wir haben eine Darstellung $\lambda = s\cdot e^{i\varphi}$ mit $s>0$ und $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, wobei s und φ eindeutig bestimmt sind. Dann ist $\sqrt{\lambda}=\sqrt{s}\cdot e^{i\varphi/2}$, wobei $\sqrt{s}$ die reelle Wurzel ist.

Die Behauptung folgt für reelle positive λ aus Bsp. 1.2 und Lemma 1.5 (Zusatz (i)). Also gilt für $\lambda\in(0,\infty)$

$$\sqrt{\lambda}^{-n}\cdot e^{-\frac{|\xi|^2}{2\lambda}} = \hat{\varphi}_\lambda(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} e^{-\frac{\lambda|x|^2}{2}}\, dx$$

Nun stehen rechts und links des "=" Funktionen von λ, die auf $\{z\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re} z>0\}$ holomorph sind (wg. $\operatorname{Re}\lambda>0$ kann man rechts unterm Integral differenzieren). Der Identitätssatz für Potenzreihen bzw. holomorphe Funktionen ergibt jetzt die Behauptung.

Satz 1.1: (Fourierinversionsformel) Es seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$
mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\,d\xi$. Dann
ist $f(x) = g(x)$ λ^n-fast überall.

Bem.: Insbesondere existiert ein Vertreter der Äquivalenzklasse von f, der in $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ liegt. Etwas ungenau sagt man dann: $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ und $f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\,d\xi$

Bew.: (1) Wir nehmen zunächst an, dass $f \in L^1 \cap C_b^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist. Mit $\varphi(x) = e^{-|x|^2/2}$ haben wir nach Bsp. 1.2 und Lemma 1.5 (2) für $\lambda > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, \varphi(\lambda \xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x) \cdot \varphi(x)\,dx .$$

Für $\lambda \searrow 0$ ergibt sich mit dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\,d\xi \overset{f \text{ stetig}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(0)\, \varphi(x)\,dx = f(0) \cdot (2\pi)^{n/2}$$

Für $g(x) = f(x+a)$ folgt

$$f(a) = g(0) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\tau_{-a} f}(\xi)\,d\xi$$

$$\overset{\text{Lemma 1.4}}{=} (2\pi)^{-n/2} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \cdot e^{i\xi a}\,d\xi .$$

Ersetzen wir hierin a durch x, folgt die Beh. für $f \in L^1 \cap C_b^0(\mathbb{R}^n)$.

(2) Um uns von der zusätzlichen Voraussetzung $f \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ zu befreien, bemerken wir ein Approximationsargument, genauer gesagt die approximative Einheit $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ mit

$$K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad K(x) = (2\pi)^{-n/2} \cdot e^{-|x|^2/2}.$$

Dann gilt $f * K_\varepsilon \in L^1 \cap C_b^0(\mathbb{R}^n)$ und nach Teil (1) sowie Lemma 1.4 (2):

$$f * K_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\, \widehat{f * K_\varepsilon}(\xi)\, d\xi$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} (2\pi)^{n/2}\, \hat{f}(\xi)\, \widehat{K_\varepsilon}(\xi)\, d\xi$$

Lemma 1.5, Zusatz (ii)
$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\, \hat{f}(\xi)\, \underbrace{\hat{K}(\varepsilon\xi)}_{= (2\pi)^{-n/2} e^{-|\varepsilon\xi|^2/2} \nearrow (2\pi)^{-n/2} \text{ pktw.}}\, d\xi$$

Damit ergibt sich für λ^n-f.a. $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} f * K_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int e^{ix\xi}\, \hat{f}(\xi)\, \hat{K}(\varepsilon\xi)\, d\xi$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\xi}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

Lebesgue'scher Konvergenzsatz

Eigenschaft einer radial fallenden approximativen Einheit (sonst: Übergang zu einer Teilfolge!)

□

<u>Folgerung:</u> Die Fouriertransformation $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0^0(\mathbb{R}^n)$ ist injektiv. Wir haben also die Eindeutigkeitsaussage: Sind $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} = \hat{g}$, so ist $f = g$ (als Elemente von $L^1(\mathbb{R}^n)$) bzw. $f(x) = g(x)$ λ^n-f.ü..

Die Fouriermukehrformel soll nun gleich verwendet werden, um ein weiteres wichtiges Beispiel zu rechnen:

Bsp 1.3: Für $f(x) = e^{-|x|}$ gilt $\hat{f}(\xi) = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) (1+|\xi|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$.

Folgerung: Für $g(x) = (1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$ ist

$$\hat{g}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot e^{-|\xi|}.$$

Bew.: (1) $n=1$: Wir haben

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-|x|} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{-ix\xi+x} dx + \int_0^\infty e^{-ix\xi-x} dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\xi)} dx + \int_0^\infty e^{x(-1-i\xi)} dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{1+\xi^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+\xi^2}$$

und das ist wg. $\Gamma(1) = 1$ die Behauptung für $\hat{f}$ im Fall $n=1$.

Nun ist $f(x) = f(-x) = \hat{\hat{f}}(x)$ (Fourierinversionsformel!)

Mit $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \Gamma(1) \cdot g(\xi)$ folgt weiter

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \hat{g}(x), \text{ also } \hat{g}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|x|},$$

und das ist gerade die Folgerung im Fall $n=1$. Insbes. haben wir gezeigt, dass

$$e^{-|x|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \hat{g}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{e^{-ix\xi}}{1+\xi^2} d\xi = \frac{1}{\pi} \int \frac{e^{-ix\xi}}{1+\xi^2} d\xi$$

(2) $n \geq 2$. Um diesen Fall zu behandeln benötigen wir die Identität

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{|x|^2}{4u}} du \qquad (!)$$

Zum Beweis von (!) setzen wir die Darstellung

$$\frac{1}{1+\xi^2} = \int_0^\infty e^{-u-u\xi^2} du$$

in den gerade gezeigten Ausdruck ein und erhalten

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \int_0^\infty e^{-u-u\xi^2} du \, d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-u\xi^2} d\xi \; du$$

Nun ist das innere Integral im wesentlichen die Fourier-transformierte einer Gaussfunktion:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-u\xi^2} d\xi = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2u}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4u}}$$

Einsetzen ergibt: $e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{|x|^2}{4u}} du$, also (!).

Damit (Jetzt ist $x \in \mathbb{R}^n$!):

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|} e^{-ix\xi} dx$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} e^{-\frac{|x|^2}{4u}} dx \, du \quad \text{(gleich mit Fubini)}$$

und das innere Integral ist wieder im wesentlichen die Fouriertransformierte einer Gaussfunktion:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} e^{-\frac{|x|^2}{4u}}\, dx = (2\pi)^{n/2} \cdot e^{-u|\xi|^2} (2u)^{n/2} .$$

Einsetzen ergibt

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^{n/2} \cdot \int_0^\infty e^{-u} \cdot u^{\frac{n-1}{2}} \cdot e^{-u|\xi|^2}\, du$$

Subst $v = u \cdot (1+|\xi|^2) \rightsquigarrow du = (1+|\xi|^2)^{-1} dv \quad u^{\frac{n-1}{2}} = v^{\frac{n-1}{2}} (1+|\xi|^2)^{-\frac{n-1}{2}}$

$$\ldots = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty v^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-v}\, dv$$

$$= \frac{2^{n/2}}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}} ,$$

wie allgemein behauptet. Die allgemeine Form der Folgerung ergibt sich jetzt wieder aus der Fourierumkehrformel. $\square$